ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

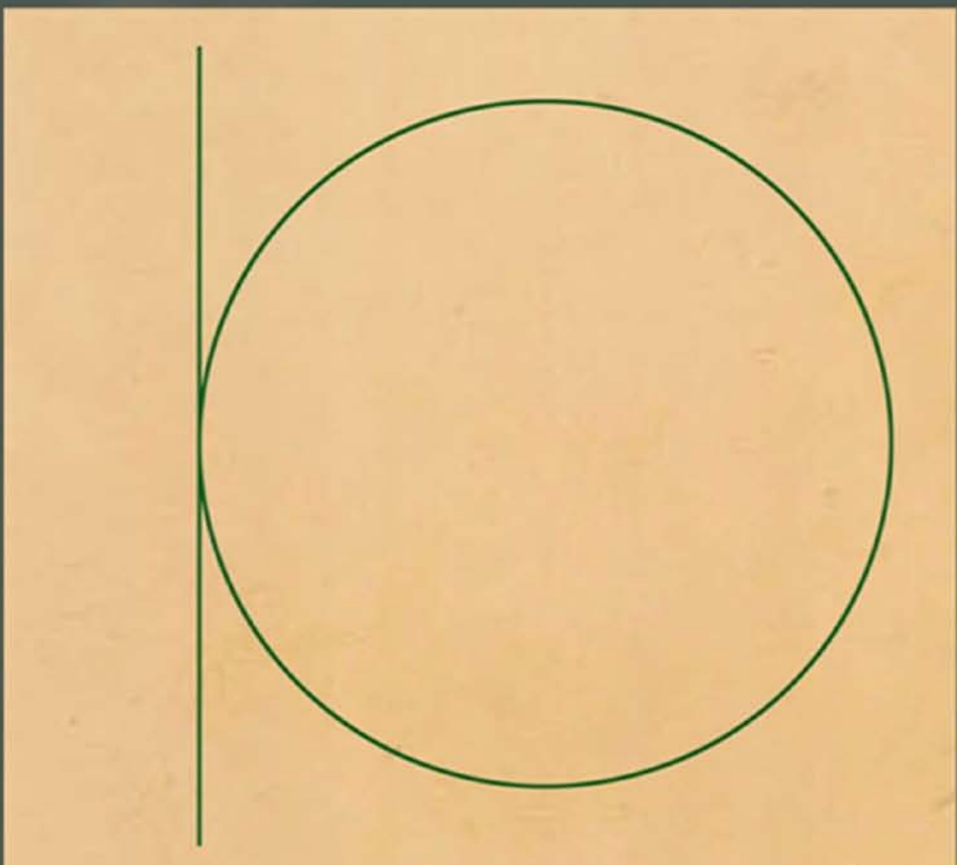
Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

IL PRINCIPIO DI IMMISURABILITA' ASSOLUTA E LA SCIENZA DELLO SPAZIO

LA STEREICA



1997

Giuseppe Maria Catalano

IL PRINCIPIO DI IMMISURABILITA' ASSOLUTA E LA SCIENZA DELLO SPAZIO

LA STEREICA

Qualsiasi acquisizione scientifica è una rappresentazione della realtà e come tale essa esiste in funzione di un sistema di rappresentazione relativo e provvisorio che l'uomo modifica, e qualche volta sconvolge, via via che si sviluppa la sua conoscenza, cercando di raggiungere una configurazione quanto più verosimile all'essenza del reale.

E' proprio questa capacita di uscire incessantemente dal sistema di rappresentazione, in cui man mano si trova avviluppato, ciò che realizza la genialità dell'uomo e lo distingue nettamente dagli altri esseri viventi.

E' importante capire che tutti gli esseri non conoscono la realtà, ma una rappresentazione di essa, variabile secondo le caratteristiche e quindi le potenzialità degli organi sensoriali di cui ciascuno a dotato.

L'uomo sa di essere limitato nella conoscenza dall'impossibilità di cogliere direttamente l'essenza del reale e così cerca di ideare dei sistemi di rappresentazione che abbiano capacità di indagine superiore a quello di cui per natura è dotato.

Se tale cognizione piena non è umanamente possibile è pur vero che il grandioso potenziale speculativo del cervello umano deve poggiare su un dato sistema di rappresentazione per avanzare nell'indagine sull'essenza, creando via via modelli di tale realtà che sono, a loro volta, essi stessi sistemi di rappresentazione pin approfonditi, per ulteriori avanzamenti della conoscenza.

Siamo di fronte dunque ad un processo evolutivo infinito e quando diciamo *infinito* ci rendiamo già conto che facciamo riferimento all'attuale sistema generale di rappresentazione raggiunto, in cui tale termine ha senso.

Nell'attuale sistema di rappresentazione l'universo è fatto d'energia, cioè di forze e regole cui queste forze sono soggette, poiché la suddivisione di particelle sempre più infinitesime genera particelle enormemente più piccole poste a distanze proporzionatamente enormi e questo processo è, per il principio di continuità della materia, infinito, sicché ogni particella può schematizzarsi come una forza che si sposta ad altissima velocità su una superficie ideale chiusa e mutevole.

La traiettoria che si svolge su tale superficie è la prima regola cui la forza è soggetta.

Il principio di continuità è legato intimamente al concetto di infinito.

L'uomo non conosce un mondo finito, ma solo un mondo infinito. Un sasso è un corpo infinito, perché è costituito da infinite *particelle* sempre più piccole poste a distanze reciproche in proporzione ad esse grandissime così come accade nell'universo per le stelle e le galassie.

Quella che definiamo finitezza è solo la delimitazione, cioè l'identificazione relativa ai nostri sensi, di una porzione *infinita* del mondo.

L'uomo in effetti ignora il concetto di finitezza, come contrario di infinito, completamente assente in natura, ma anche nei suoi pensieri.

Un punto importante è chiarire che esiste l'infinito, non l'infinitesimo, inteso come risultato di una divisione infinita, poiché l'uno esclude l'altro per definizione, in quanto dividere in infinite parti significa non raggiungere mai una parte infinitesima; però fra i due è l'infinito che esiste, perché ne facciamo continuamente esperienza.

Il concetto di infinito porta a fondamentali conclusioni.

Consideriamo anzitutto lo spazio della *stereica*. Finora lo spazio si è considerato composto da enti astratti come punti, rette, piani, superfici e corpi di infinite forme.

L'infinitezza del mondo porta ad affermare un altro principio o meglio a chiarire il significato di infinito nel concetto di *"immisurabilita"*.

Consideriamo due punti distinti A e B nello spazio: il principio di continuità può esprimersi affermando che esiste sempre un punto C tra A e B, anzi ne esistono infiniti (1).

Quando fisso la posizione di A e B nello spazio, io la colgo solo in quanto è riferita a me, al mio corpo ed ai miei organi di conoscenza, cioè al mio sistema di riferimento. In realtà A e B non hanno una distanza prefissata assoluta. Ciò significa che A e B possono, sciolti da me, considerarsi a distanza infinita o, viceversa, coincidenti.

La comprensione di questa essenza della natura, che può definirsi *principio di immisurabilità assoluta dello spazio* ha importantissimi risvolti nella scienza della rappresentazione dello spazio e quindi in tutte le scienze.

Analizziamo gli enti fondamentali ed in particolare la retta, la retta euclidea (2):

immediata conseguenza del principio di immisurabilità assoluta è che *a due a due tutti i punti della retta possono considerarsi coincidenti.* E poiché la totalità contiene l'infinità si deduce che la retta non può essere aperta, perché in tal caso dovrebbero esistere due punti non coincidenti.

Dunque la chiusura di tale ente porta ad affermare l'esistenza della *circonferenza r, non della retta r,* che in realtà esiste in apparenza come porzione della circonferenza r.

Per lo stesso principio *il piano non esiste*, se non come porzione della sfera.

Ma c'e di più. Dal principio di immisurabilità si trae anche che due punti diametralmente opposti della circonferenza o della sfera non hanno una distanza prefissata, ma possono, svincolati dall'osservatore, considerarsi tanto a distanza infinita, quanto coincidenti.

Questa natura dello spazio implica che non esiste un centro o un confine che limiti l'universo, perché ciascuna sfera potrebbe considerarsi centro e limite.

Che la retta si chiude ce lo ha sempre lasciato intendere quella disciplina che storicamente e costituzionalmente è alla base della *stereica,* cioè *la geometria proiettiva.*

Fissato infatti il punto C, esterno alla retta r, il generico punto P del piano per C ed r viene sempre proiettato da C sulla r in P' e suol dirsi che tutti e soli i punti appartenenti alla retta $\underline{r}$, parallela alla r ed appartenente a C, escluso C, vengono proiettati, nei due versi di $\underline{r}$, nel punto I^{r}_{oo} improprio, cioè all'infinito, della r. Dunque per la geometria proiettiva il punto I^{r}_{oo} chiude la r.

Tuttavia per punto improprio la stessa disciplina intende la *direzione* appartenente alla r ed a tutte le parallele alla r.

Questa concezione del punto improprio è però in se antinomica: due rette parallele, come $\underline{r}$ d r, ovvero infinite rette parallele ad r, distinte, cioè *non aventi* punti in comune, *hanno* in comune il punto improprio.

In realtà le circonferenze $\underline{r}$ ed r non hanno in comune alcun punto, ciò che hanno in comune è solo il centro.

Dunque circonferenze, mai rette.

Dove nasce allora l'inganno della retta?

Nella natura ovviamente! Nell'osservazione, per esempio, di una fune tesa dalla gravita terrestre, il filo a piombo, e cioè nella constatazione che mutando lo sguardo il tratto di fune tesa vista dall'alto, o dal basso, appare ad un certo momento coincidente con la sua sezione. Ma l'immagine sulla retina è determinata dall'energia luminosa diffusa dalla fune, quell'energia radiante secondo linee simili a quelle fornite dall'immagine della fune tesa, per cui il nostro principio di allineamento visivo che ha portato al concetto di retta è basato sulla traiettoria naturale seguita dal raggio luminoso, di cui, sui dati della sola esperienza, non possiamo dir nulla.

Il principio di immisurabilità porta però, come si e già spiegato, alla chiusura della cosiddetta *retta* e cioè alla curvatura della stessa. D'altra parte la proiezione del filo a piombo sulla retina, compresa perfettamente nella sezione stessa del filo, implica una curvatura costante della traiettoria del filo e dunque questa non può che essere circolare.

Dunque siamo di fronte ad una *conformazione sferica* dello spazio.

Una prima conseguenza di questo fenomeno è che quando osserviamo una luce celeste, ad esempio proveniente da una stella lontana, essa può avere la sua sorgente in un corpo collocato in realtà alle nostre spalle.

Anzi tale luce potrebbe essere stata emessa dal nostro stesso pianeta, con un effetto boomerang dell'universo, che la riporta a noi.

Una seconda conseguenza immediata è che due emissioni d'energia, apparentemente rettilinee e non parallele, si incidono in due punti dello spazio.

Pertanto ad ogni stella, che emette infinite radiazioni, considerata il primo punto d'incidenza, deve corrispondere sempre un secondo punto d'incidenza, in cui le radiazioni convergono. In tale punto l'energia potrebbe essere assorbita da un corpo celeste oppure continuare la sua traiettoria e tornare alla stella madre.

Se dunque ciascun piano è in realtà una sfera, come possiamo stabilirne la curvatura?

La risposta è insita nell'affermazione già espressa, tratta dal principio di immisurabilità, e cioè che ciascuna sfera dello spazio può considerarsi centro e limite dell'universo.

Non esiste pertanto una curvatura assoluta assegnata, ma essa è relativa all'osservatore, cioè al sistema di riferimento dell'osservatore.

Ma se circonferenze e sfere non hanno un centro ed un raggio assoluti assegnati, può parlarsi di interno ed esterno di una sfera?

La risposta è no.

Ciascuna sfera divide lo spazio in due entità distinte, ma è indifferente definire una delle due interna e l'altra esterna.

Per comprendere questo assunto stabiliamo due osservatori O_1 ed O_2 e definiamo il primo interno alla sfera σ ed il secondo esterno ad essa .

Immaginiamo che O_2 rimpicciolisca. Mutano allora in proporzione inversa la sua distanza dalla sfera ed il raggio di questa. Muta cioè in proporzione diretta la curvatura stessa della σ (essendo l'inverso del raggio) .

Portando all'estremo il procedimento si avrebbe allora l'assenza della curvatura per una distanza di O_2 da σ infinita.

Lo stesso accade ovviamente se rimpicciolisce O_1.

D'altra parte il rimpicciolimento dei due osservatori equivale, in riferimento alla sfera σ , all'allontanamento di essi sulla retta r che li congiunge, la quale è in realtà una circonferenza avente in comune con σ due punti S_1 ed S_2.

Sappiamo anche che la curvatura non è definibile quando l'osservatore appartiene alla curva stessa.

La coordinazione delle due condizioni porta all'unica soluzione possibile: l'assenza della curvatura di σ si ha quando i due osservatori appartengono sia alla circonferenza r che alla sfera σ , quando cioè O_1 ed O_2 , distanti infinitamente dal primo punto S_1 , coincidono nel secondo punto, S_2 , in cui la circonferenza r incide la sfera σ .

I due osservatori si trovano ora nelle stesse condizioni, nessuno dei due può definirsi interno od esterno alla sfera.

Alle stesse condizioni si sarebbe giunti se si fosse partiti da posizioni opposte.

Allora *considerato un punto, è indifferente in assoluto ritenerlo interno o esterno ad una data sfera.*

Dunque se ci riferiamo, ad esempio, alla sfera celeste, possiamo considerarci tanto all'interno quanto all'esterno di essa.

Questo aspetto della realtà richiama un'altra pagina della geometria proiettiva: la polarità.

Limitiamoci a richiamarla in cenni per la sfera.

Dato un punto P, esterno alla sfera σ , la geometria proiettiva afferma che la generica retta t appartenente a P e tangente alla σ descrive come luogo di tangenza una circonferenza p, definita *curva polare di P rispetto alla* σ .

Il piano π a cui appartiene la p viene definito allo stesso modo piano polare di P rispetto alla σ .

Ora accade che al polo P corrispondono sempre una polare ed un piano polare e viceversa, ad ogni polare e piano polare corrisponde sempre un polo P.

In particolare se P è all'infinito, essendo le tangenti parallele fra loro, la polare è una circonferenza massima ed il piano polare contiene quindi il centro della sfera σ .

Quando P si avvicina alla σ , la polare p corrispondente impiccolisce, sino a coincidere col polo P quando questo appartiene alla σ .

Quando poi P è interno alla sfera σ , suol dirsi che la polare è *immaginaria,* mentre il piano polare è *reale* ed esterno alla σ .

Se infine il polo P è al centro della σ , allora il piano polare e la polare immaginaria sono all'infinito.

Siamo di fronte ad un'altra antinomia: ad un piano *reale* appartiene una curva *immaginaria.*

Riesaminiamo adesso la polarità sulla sfera alla luce dei nuovi principii della stereica.

Sia ancora σ la sfera e P il polo, *esterno* ad essa. Sostituiamo dunque circonferenze a rette e sfere a piani.

Per P si conduca un generico fascio torico di circonferenze t tangenti alla σ nella circonferenza polare p appartenente alla sfera polare π: è evidente che esistono infiniti casi, ovvero infinite polari corrispondenti ad infinite curvature g delle circonferenze del suddetto fascio.

In effetti non esiste una curvatura assoluta g e l'osservatore, posto in P, non è in grado di cogliere alcuna curvatura.

Per comprendere meglio la relatività della g richiamiamo il caso dei due punti O_1 ed O_2, presentato nel paragrafo precedente.

Immaginiamo allora che O_2 coincida col polo P esterno alla σ e che O_1, *interno* alla σ, sia il centro della circonferenza polare p.

Per quanto si è esaminato sappiamo che quando O_1 ed O_2 rimpiccioliscono, tale mutamento equivale, mutando via via le proporzioni, ad uno spostamento dei due osservatori sulla circonferenza r che li congiunge, sino a coincidere entrambi nel secondo punto S_2, in cui la r incide la sfera σ, quando questa appare ad entrambi priva di curvatura.

Dunque in tali condizioni il polo $P(O_2)$ e la polare $p(O_1)$ coincidono in S_2.

Nelle condizioni intermedie, da S_1 verso S_2, essendo man mano la curvatura di σ, in proporzione decrescente, muta necessariamente la curvatura g, che però ad O_2 appare sempre inalterata. O_1 e $P(O_2)$ si spostano su r allontanandosi da S_1 verso S_2 e la polare corrispondente si sposta sulla sfera σ, dapprima ingrandendosi, poi impiccolendosi via via, fino a coincidere anch'essa con S_2.

Adesso $p(O_1)$ coincide con $P(O_2)$, il fascio delle t con la sfera polare π e questa ancora con la sfera σ, che appare, come sappiamo, priva anch'essa di curvatura.

Come in tali condizioni è indifferente parlare di interno o esterno della sfera σ, allo stesso modo è indifferente parlare di sfera polare π tangente esternamente o internamente alla quadrica .

A tali condizioni il polo P può giungere tanto che sia inizialmente esterno, quanto che sia inizialmente interno alla quadrica.

Dunque è ancora indifferente parlare di polo P esterno o interno alla quadrica.

In conclusione, la polare, a differenza di quanto avveniva nel sistema della geometria descrittiva, è sempre una conica *reale* appartenente alla sfera σ o in generale alla superficie quadrica di cui si vuol trattare.

La sua posizione, la sua curvatura, ripetiamolo, dipende, come tutti gli enti dello spazio, dall'osservatore.

Inoltre il polo è sempre un punto ben determinato, che, mutando estensione, può trovarsi interno od esterno alla sfera o in generale alla quadrica cui corrisponde.

Come già nel caso precedente, anche in questo caso non ha senso considerare poli, o in genere punti, impropri o all'infinito, così come non ha senso considerare polari, o in genere curve, improprie o all'infinito.

Un altro esempio dei chiarimenti teorici apportati dal principio di immisurabilità e dalle sue implicazioni nel campo geometrico, è fornito dalla teoria delle coniche e delle quadriche.

Limitiamoci anche questa volta per semplicità al caso delle coniche, considerando quello delle quadriche un estensione del primo.

La geometria proiettiva, ed ancor più la geometria precedente, ha identificato come appartenenti alla famiglia delle coniche l'ellisse (e quindi la circonferenza), la parabola, l'iperbole ed, in forma semplicemente e doppiamente degenere, rispettivamente, la coppia di rette distinte e coincidenti.

Ricordiamo anzitutto come la geometria proiettiva generi le coniche per effetto della proiezione di una circonferenza (ma anche di una qualsiasi altra conica non degenere) su un piano.

Cosi, se definiamo con O il centro di proiezione, con γ il piano contenente la circonferenza c, con π il piano di proiezione ed infine con λ il piano per O parallelo al piano di proiezione π , è noto che a seconda che la circonferenza c abbia in comune con λ (piano limite) due, uno o nessun punto, la corrispondente curva proiezione su π risulta un'iperbole, una parabola o un'ellisse.

Dunque la geometria proiettiva afferma che quando la circonferenza c ha uno o due punti appartenenti al piano λ , essendo questo piano parallelo a π , tali punti vengono proiettati all'infinito, *aprendo* la curva proiezione in uno o due rami che si *chiuderebbero* in realtà all'infinito.

Ancora una volta si presenta un aspetto antinomico nella teoria delle coniche (e quindi delle quadriche).

Affrontiamolo con gli strumenti definiti dal principio di immisurabilità. Sostituiamo dunque ai piani π, λ ed γ tre sfere omonime. Manteniamo in O su λ il centro di proiezione e sia sempre c la circonferenza su γ .

Ciascuna circonferenza proiettante da O sulla sfera di proiezione π , incide necessariamente tale sfera in due punti, per cui la proiezione di c da O su π indipendentemente che essa abbia in comune con λ uno, due o nessun punto, dà sempre vita ad *una curva generalmente gobba che si estende in due rami chiusi e reali,* in quanto tutti i punti della circonferenza c, compresi quelli appartenenti alla sfera λ, vengono proiettati sempre sulla sfera π .

Anche in questo caso, come per la polarità, le curvature delle varie sfere che possono essere infinite, non hanno influenza sulla teoria, in quanto tutti i casi possono essere ricondotti a quello esaminato, mutando semplicemente l'estensione dell'osservatore.

Ma se la distanza fra due punti in senso assoluto non esiste, si può definire *una forma assoluta* per qualsiasi corpo?

Evidentemente no.

La forma è sempre relativa all'osservatore. Si è mostrato come, mutando l'estensione dell'osservatore muta la curvatura delle circonferenze e delle sfere che conformano lo spazio.

Dunque muta la forma dei corpi cui queste appartengono.

Questo mutamento, questo ingrandimento o impiccolimento, avviene in un dato tempo.

Ecco che il tempo si mostra con chiarezza la quarta dimensione dello spazio, inscindibile dal concetto di forma.

Non ha senso parlare di traiettoria senza considerare la velocità con cui essa viene percorsa, ed in generale non ha senso parlare di forma senza considerare la velocità con cui si muove l'osservatore, il suo stato di quiete o di moto. Infatti dal principio di immisurabilità si è tratto che *una data traiettoria apparentemente rettilinea si può percorrere o mutando posizione su di essa o mutando estensione.*

I due fenomeni, apparentemente diversi, sono in realtà, per un osservatore esterno agli enti interessati, equivalenti, perché il punto osservatore in entrambi i casi percorre la stessa traiettoria circolare dalle stesse condizioni iniziali alle stesse condizioni finali.

Nel primo caso l'osservatore non muta la sua estensione, ma mutando posizione percorre lo spazio x nel tempo y.

Nel secondo caso l'osservatore non muta la sua posizione, ma mutando estensione percorre lo stesso spazio x nello stesso tempo y.

Ciò significa che è possibile conoscere l'universo, senza mutare la propria posizione, ma mutando la propria estensione (con microscopi elettronici, radiotelescopi o altri strumenti d'indagine sempre più potenti).

Richiamiamo un'ultima volta il caso dei due osservatori O_1 ed O_2 sulla circonferenza r secante la sfera σ in S_1 ed S_2 ed esaminiamo lo spostamento di uno dei due osservatori, per esempio 0_2 da S_1 ad S_2. Supponiamo che O_2 sia estremamente vicino, ma non coincidente con S_1 , perché altrimenti non potremmo valutare alcuno spostamento da questa posizione.

Come si ricorda man mano che, ad una data velocità V, l'osservatore O_2 rimpiccolisce, diminuisce per tale osservatore la curvatura della σ , ma rimane immutata quella della r, perché l'osservatore vi appartiene, e quando tale osservatore si ritrova sul secondo punto di appartenenza, S_2 , della r alla σ , anche questa gli appare priva di curvatura.

In tali condizioni l'arco di r fra i punti S_1 ed S_2 , percorso da O_2, risulta a quest'ultimo assai ridotto rispetto all'arco originario. Tale arco e quindi lo spazio si è contratto.

Sia allora t_3 il tempo impiegato da O_2 per giungere da S_1 ad S_2 , alla velocità costante V prestabilita, segnato dall'orologio di un osservatore O_3 , che non avendo mutato come O_2 la sua estensione, ritiene la σ e la r immutate. La diminuzione della curvatura della σ è infatti solo relativa ad O_2 .

Ora accade che O_2 alla stessa velocità V ha percorso un arco minore di quanto risulta ad O_3 , e dunque il suo orologio segna un tempo t_2 minore di t_3.

Se ne trae che ad O_3 il percorso di O_2 appare immutato, mentre il tempo indicato da O_2 appare dilatato, tale da ottenere una durata di percorso t_2 minore di t_3.

Supponiamo adesso che O_2 non muti estensione, ma, rifacendo lo stesso percorso, muti posizione, muovendosi alla velocità V prestabilita da S_1ad S_2 sulla r.

Anche a tale osservatore, giunto in S_2 sulla σ , tale sfera apparirà priva di curvatura.

Siamo dunque nelle stesse condizioni finali del processo precedente, essendo partiti dalle stesse condizioni iniziali ed avendo percorso la stessa traiettoria circolare.

Dunque per l'equivalenza dei due fenomeni l'orologio di O_2 segnerà un tempo t_2. L'orologio dell'osservatore O_3 , che non ha mutato la sua posizione, segnerà un tempo t_3 maggiore di t_2.

Anche questa volta per O_2 lo spazio si è contratto ed il tempo si è dilatato, in modo da risultare una durata di percorso t_2 minore di t_3.

Considerando infine che passando dallo stato di quiete a quello di moto il tempo si dilata, è deducibile che, aumentando la velocità nei due fenomeni trattati, si abbia via via in entrambi una maggiore contrazione dello spazio ed una maggiore dilatazione del tempo.

Quel che è avvenuto passando dalla fisica galileiana e newtoniana a quella relativistica, ancora una volta si ripete passando dalla geometria euclidea e proiettiva a quella relativistica della stereica.

Se per la maggior parte delle attività umane l'attuale teoria geometrica può ritenersi accettabile, l'uso dei microscopi e dei radiotelescopi ed in generale lo studio del microcosmo e del macrocosmo non può prescindere da questa scienza, che apre all'uomo un nuovo sistema di rappresentazione.

GMC

(1) *Si ricordi l'assioma di continuità di R. Dedekind: Siano A e B due insiemi di numeri reali con la proprietà che a<=b per ogni a appartenente ad A e b appartenente a B. Allora esiste almeno un numero reale c con la proprietà che a<=c<=b per ogni elemento a in a e b in B.*

(2) Il concetto di retta va anzitutto chiarito in relazione alle geometrie non euclidee, quella iperbolica di (Bolyai, Lobachevsky) e quella ellittica (Gauss, Riemann) che non negano l'esistenza della retta, ma ne ampliano il concetto.

Il V° postulato di Euclide secondo cui data una retta r ed un punto a P che non le appartenga, esiste un'unica retta p passante per P e ad essa parallela, cioè *non avente con essa punti in comune, è stata apparentemente contraddetto, come è noto, da queste geometrie.*

Nel caso della geometria iperbolica data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, esistono distinte rette per P ad essa parallele.

Nel caso della geometria ellittica data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, non esiste alcuna retta per P ad essa parallela.

La negazione del V° postulato di Euclide è possibile perché viene mutato il concetto di retta in quello di geodetica.

In realtà la retta è sì una geodetica, in quanto linea più breve che congiunge due punti dello spazio, ma è l'unica geodetica che può assumersi asse di simmetria, priva cioè di curvatura. Così la intendeva Euclide.